



UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTÓBAL DE HUAMANGA
FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL

Datos autor /Teléfono: +51965281663

Correo Electrónico: jose.huayanay@unsch.edu.pe

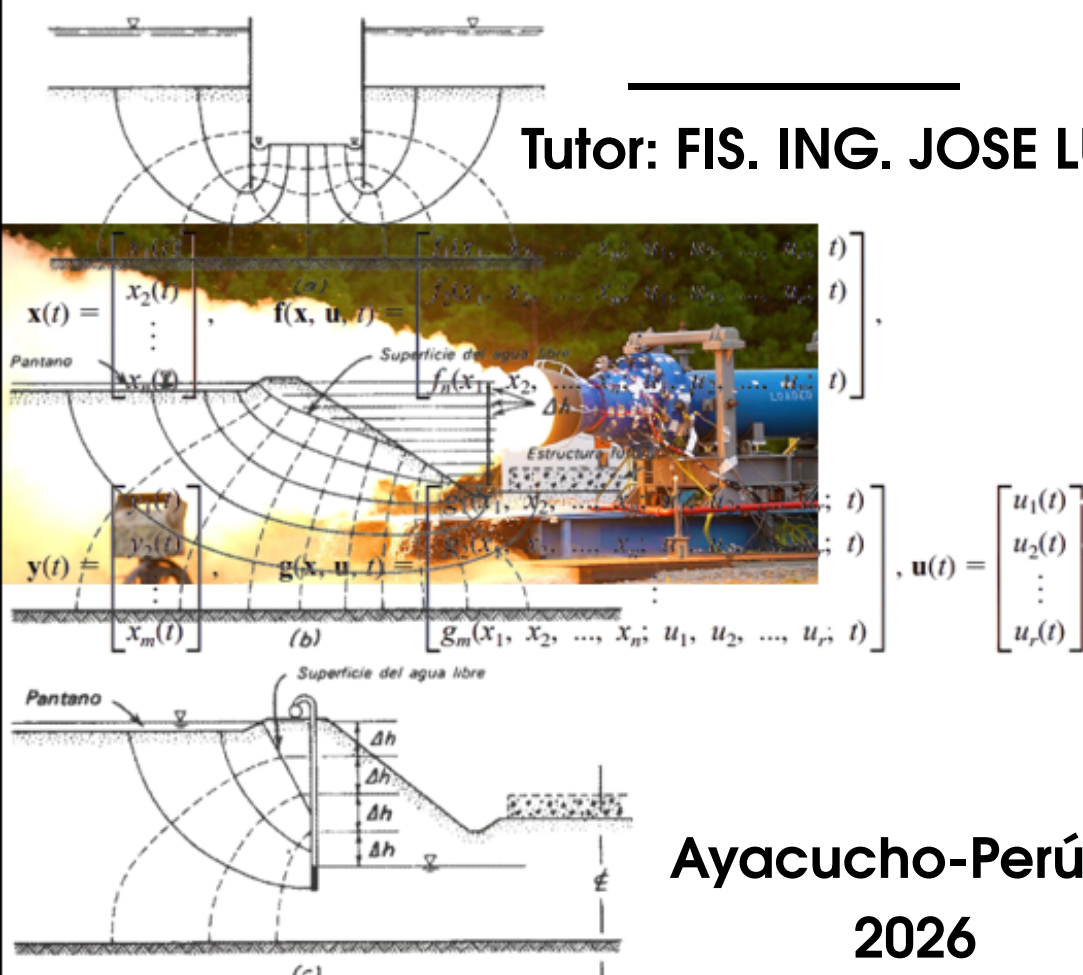
DOI: <https://doi.org/10.0000/villautomation.lib07>

FISICA II-FS283- ING CIVIL-UNI02-3

DEPÓSITO LEGAL: 202603221

ISSN: 3119-7957 (En línea)

Tutor: FIS. ING. JOSE LUIS HUAYANAY



Ayacucho-Perú
2026

Porque Jehová da la sabiduría, y de su boca viene el conocimiento y la inteligencia Prov.2:6



UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTÓBAL DE HUAMANGA
FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL

Datos autor /Teléfono: +51965281663

Correo Electrónico: jose.huayanay@unsch.edu.pe

DOI: <https://doi.org/10.0000/villautomation.lib07>

Índice general

I	Parte Uno	
1	Movimiento Oscilatorio y Ondulatorio	9
1.1	Introducción	9
1.2	Movimiento Armónico Simple	10
1.3	Demostración Matemática del Movimiento Armónico	11
1.4	Solución de la Ecuación Diferencial	11
1.5	Velocidad y Aceleración	12
1.6	Período y Frecuencia	13
1.7	Interpretación Física	13
1.8	Aplicaciones en Ingeniería Civil	13
1.8.1	Edificios durante un sismo	13
1.8.2	Puentes	14
1.8.3	Aislamiento Sísmico	14
1.8.4	Torres y Edificios Altos	14
1.8.5	Control de Vibraciones	14
1.9	Ejemplo Aplicado a Ingeniería Civil	15
1.10	Energía del Movimiento Armónico	15
1.11	Péndulo Simple	16
1.12	Péndulo Compuesto	16
1.13	Oscilaciones Amortiguadas	16
1.14	Oscilaciones Forzadas	16
1.15	Resonancia	16

1.16	Superposición de Oscilaciones	17
1.17	Ondas Mecánicas	17
1.18	Velocidad de Propagación	17
1.19	Ecuación de Onda	17
1.20	Ondas Sonoras	17
1.21	Efecto Doppler	18
1.22	Análisis de Fourier	18
1.23	Aplicaciones en Ingeniería Civil	18
1.24	Ejemplo en Scilab	18
1.25	Problemas Propuestos para Casa	18
2	Calor y Termodinámica	23
2.1	Temperatura y Calor	23
2.2	Concepto de Temperatura	24
2.3	Demostración de las Escalas de Temperatura	24
2.4	Equilibrio Térmico	24
2.5	Energía Interna	24
2.6	Cantidad de Calor	25
2.7	Capacidad Calorífica	25
2.8	Calor Latente	26
2.9	Dilatación Térmica	26
2.9.1	Demostración de la Dilatación Lineal	26
2.9.2	Dilatación Superficial	27
2.9.3	Dilatación Volumétrica	27
2.10	Esfuerzo Térmico	27
2.11	Transferencia de Calor	27
2.11.1	Conducción	27
2.11.2	Convección	28
2.12	Interpretación Física	28
2.13	Aplicaciones en Ingeniería Civil	28
2.13.1	Juntas de Dilatación en Puentes	28
2.13.2	Pavimentos de Concreto	29
2.13.3	Edificios	29
2.13.4	Transferencia de Calor en Edificaciones	29
2.13.5	Presas y Concreto Masivo	29
2.14	Ejemplo Aplicado a Ingeniería Civil	29
2.15	Radiación	30
2.15.1	Ley de Stefan-Boltzmann	30
2.15.2	Intercambio Neto de Radiación	30
2.15.3	Aplicaciones en Ingeniería Civil	31
2.16	Teoría Cinética de los Gases	31
2.16.1	Ecuación del Gas Ideal	31
2.16.2	Velocidad Cuadrática Media	31
2.16.3	Energía Cinética Molecular	32

2.17	Leyes de los Gases	32
2.17.1	Ley de Boyle	32
2.17.2	Ley de Charles	32
2.17.3	Ley de Gay-Lussac	32
2.17.4	Ley Combinada	33
2.18	Trabajo de un Gas	33
2.18.1	Proceso Isobárico	33
2.19	Primera Ley de la Termodinámica	33
2.20	Procesos Termodinámicos	33
2.20.1	Proceso Isotérmico	33
2.20.2	Proceso Adiabático	34
2.20.3	Proceso Isochórico	34
2.20.4	Proceso Isobárico	34
2.21	Segunda Ley de la Termodinámica	34
2.22	Máquinas Térmicas	34
2.23	Ciclo de Carnot	35
2.24	Interpretación Física	35
2.25	Aplicaciones en Ingeniería Civil	35
2.25.1	Diseño Energético de Edificaciones	35
2.25.2	Sistemas de Ventilación	35
2.25.3	Concreto Masivo	35
2.25.4	Túneles y Minas	35
2.25.5	Eficiencia Energética	35
2.26	Ejemplo Aplicado a Ingeniería Civil	36
2.27	Aplicaciones en Ingeniería Civil	36
2.28	Ejercicios Propuestos Avanzados: Calor y Termodinámica	36
	Bibliografía	39
	Books	39
2.29	Bibliografía Recomendada	39



1	Movimiento Oscilatorio y Ondulatorio	9
1.1	Introducción	
1.2	Movimiento Armónico Simple	
1.3	Demostración Matemática del Movimiento Armónico	
1.4	Solución de la Ecuación Diferencial	
1.5	Velocidad y Aceleración	
1.6	Período y Frecuencia	
1.7	Interpretación Física	
1.8	Aplicaciones en Ingeniería Civil	
1.9	Ejemplo Aplicado a Ingeniería Civil	
1.10	Energía del Movimiento Armónico	
1.11	Péndulo Simple	
1.12	Péndulo Compuesto	
1.13	Oscilaciones Amortiguadas	
1.14	Oscilaciones Forzadas	
1.15	Resonancia	
1.16	Superposición de Oscilaciones	
1.17	Ondas Mecánicas	
1.18	Velocidad de Propagación	
1.19	Ecuación de Onda	
1.20	Ondas Sonoras	
1.21	Efecto Doppler	
1.22	Análisis de Fourier	
1.23	Aplicaciones en Ingeniería Civil	
1.24	Ejemplo en Scilab	
1.25	Problemas Propuestos para Casa	
2	Calor y Termodinámica	23
2.1	Temperatura y Calor	
2.2	Concepto de Temperatura	
2.3	Demostración de las Escalas de Temperatura	
2.4	Equilibrio Térmico	
2.5	Energía Interna	
2.6	Cantidad de Calor	
2.7	Capacidad Calorífica	
2.8	Calor Latente	
2.9	Dilatación Térmica	
2.10	Esfuerzo Térmico	
2.11	Transferencia de Calor	
2.12	Interpretación Física	
2.13	Aplicaciones en Ingeniería Civil	
2.14	Ejemplo Aplicado a Ingeniería Civil	
2.15	Radiación	
2.16	Teoría Cinética de los Gases	
2.17	Leyes de los Gases	
2.18	Trabajo de un Gas	
2.19	Primera Ley de la Termodinámica	
2.20	Procesos Termodinámicos	
2.21	Segunda Ley de la Termodinámica	
2.22	Máquinas Térmicas	
2.23	Ciclo de Carnot	
2.24	Interpretación Física	
2.25	Aplicaciones en Ingeniería Civil	
2.26	Ejemplo Aplicado a Ingeniería Civil	
2.27	Aplicaciones en Ingeniería Civil	
2.28	Ejercicios Propuestos Avanzados: Calor y Termodinámica	
	Bibliografía	39
	Books	
2.29	Bibliografía Recomendada	



1. Movimiento Oscilatorio y Ondulatorio

1.1 Introducción

La presente guía de Física II se desarrolla a nombre de la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga, dirigida a estudiantes del área de Ingeniería Civil y otras carreras profesionales. Su propósito es fortalecer el aprendizaje de los principios fundamentales del movimiento oscilatorio y ondulatorio, integrando teoría, modelamiento matemático y aplicaciones en ingeniería. Las oscilaciones y las ondas se encuentran presentes en numerosos sistemas físicos e ingenieriles, tales como vibraciones estructurales, sismos, puentes, sistemas mecánicos, propagación del sonido y transmisión de señales. El estudio de estos fenómenos permite comprender el comportamiento dinámico de las estructuras y desarrollar soluciones tecnológicas para el análisis y control de vibraciones. En este capítulo se estudian el movimiento armónico simple, las oscilaciones amortiguadas y forzadas, la resonancia, la propagación de ondas mecánicas y sonoras, el efecto Doppler y las bases del análisis de Fourier aplicado a fenómenos periódicos.

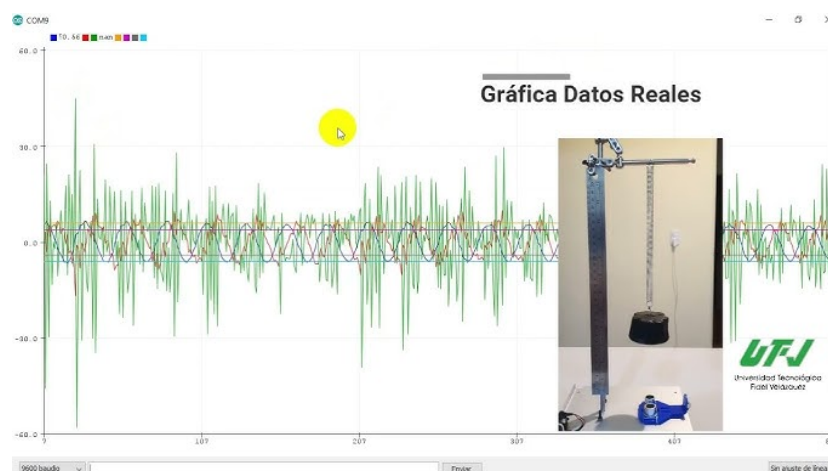


Figura 1.1.1: *Movimiento oscilatorio y propagación de ondas*

1.2 Movimiento Armónico Simple

El movimiento armónico simple (MAS) representa uno de los modelos fundamentales de la dinámica estructural. Numerosos sistemas mecánicos y estructurales pueden aproximarse mediante este modelo cuando las deformaciones son pequeñas y el comportamiento del material permanece dentro del rango elástico.



Figura 1.2.1: Aplicaciones de movimientos armónicos

La ecuación que describe el desplazamiento es

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (1.2.1)$$

donde

- A : amplitud máxima del movimiento.
- ω : frecuencia angular (rad/s).
- ϕ : fase inicial.
- t : tiempo.

1.3 Demostración Matemática del Movimiento Armónico

Considérese una masa m unida a un resorte de rigidez k , como se muestra en la Figura correspondiente.

Cuando la masa se desplaza una distancia x respecto de su posición de equilibrio, el resorte genera una fuerza restauradora dada por la Ley de Hooke

$$F = -kx \quad (1.3.1)$$

El signo negativo indica que la fuerza siempre actúa en sentido opuesto al desplazamiento.

Aplicando la Segunda Ley de Newton,

$$\sum F = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.3.2)$$

se obtiene

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.3.3)$$

Reordenando,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (1.3.4)$$

Dividiendo toda la ecuación entre la masa,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (1.3.5)$$

Definiendo

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (1.3.6)$$

la ecuación diferencial queda

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0} \quad (1.3.7)$$

Esta es la ecuación diferencial fundamental del Movimiento Armónico Simple.

1.4 Solución de la Ecuación Diferencial

Se propone una solución de tipo exponencial

$$x = e^{\lambda t} \quad (1.4.1)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial,

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0 \quad (1.4.2)$$

Como $e^{\lambda t} \neq 0$,

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad (1.4.3)$$

Las raíces características son

$$\lambda = \pm i\omega \quad (1.4.4)$$

Por tanto,

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) \quad (1.4.5)$$

Utilizando identidades trigonométricas,

$$\boxed{x(t) = A \cos(\omega t + \phi)} \quad (1.4.6)$$

donde

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}. \quad (1.4.7)$$

1.5 Velocidad y Aceleración

La velocidad es la primera derivada del desplazamiento

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \quad (1.5.1)$$

Derivando,

$$\boxed{v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)} \quad (1.5.2)$$

La aceleración corresponde a la segunda derivada

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.5.3)$$

obteniéndose

$$\boxed{a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)} \quad (1.5.4)$$

Como

$$x = A \cos(\omega t + \phi), \quad (1.5.5)$$

entonces

$$\boxed{a = -\omega^2 x} \quad (1.5.6)$$

Esta expresión demuestra que la aceleración siempre apunta hacia la posición de equilibrio.

1.6 Período y Frecuencia

La frecuencia angular está dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.6.1)$$

La frecuencia natural es

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.6.2)$$

mientras que el período de oscilación es

$$T = \frac{1}{f} \quad (1.6.3)$$

o equivalentemente

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1.6.4)$$

1.7 Interpretación Física

La ecuación

$$a = -\omega^2 x \quad (1.7.1)$$

indica que:

- Cuando el desplazamiento aumenta, la aceleración aumenta en sentido contrario.
- En la posición de equilibrio ($x = 0$) la aceleración es nula.
- En la amplitud máxima la velocidad es cero.
- La energía del sistema alterna continuamente entre energía potencial elástica y energía cinética.

1.8 Aplicaciones en Ingeniería Civil

El Movimiento Armónico Simple constituye la base de la dinámica estructural y del análisis sísmico. Muchas estructuras civiles pueden modelarse inicialmente como sistemas masa–resorte para estimar sus frecuencias naturales y evaluar su respuesta frente a cargas dinámicas.

1.8.1 Edificios durante un sismo

Durante un terremoto, un edificio experimenta vibraciones similares al movimiento de un oscilador armónico. El edificio puede modelarse mediante una masa equivalente m y una rigidez lateral k ,

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1.8.1)$$

La frecuencia natural del edificio es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.8.2)$$

Si la frecuencia del movimiento sísmico se aproxima a la frecuencia natural de la estructura, puede producirse el fenómeno de resonancia, incrementándose considerablemente los desplazamientos.

1.8.2 Puentes

Los puentes presentan vibraciones inducidas por:

- tránsito vehicular,
- viento,
- actividad sísmica,
- paso sincronizado de peatones.

El análisis modal determina sus frecuencias naturales para evitar resonancias peligrosas.

1.8.3 Aislamiento Sísmico

Los aisladores sísmicos disminuyen la rigidez efectiva del sistema estructural.

Como

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (1.8.3)$$

al reducir la rigidez,

$$k \downarrow \quad \Rightarrow \quad \omega \downarrow \quad (1.8.4)$$

y el período aumenta,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1.8.5)$$

Lo anterior reduce significativamente las aceleraciones transmitidas a la superestructura.

1.8.4 Torres y Edificios Altos

Las torres de telecomunicaciones, chimeneas industriales y edificios de gran altura experimentan vibraciones producidas por el viento.

Su comportamiento dinámico se aproxima inicialmente mediante

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1.8.6)$$

permitiendo calcular la frecuencia natural antes de realizar análisis dinámicos más complejos mediante elementos finitos.

1.8.5 Control de Vibraciones

Los amortiguadores de masa sintonizada (Tuned Mass Dampers, TMD) instalados en rascacielos y puentes funcionan modificando la respuesta dinámica del sistema principal.

El sistema completo puede representarse mediante un conjunto de osciladores acoplados, cuyo principio básico deriva directamente del Movimiento Armónico Simple.

1.9 Ejemplo Aplicado a Ingeniería Civil

Considérese un edificio cuya masa equivalente es

$$m = 2,5 \times 10^5 \text{ kg}$$

y cuya rigidez lateral es

$$k = 1,6 \times 10^8 \text{ N/m}.$$

La frecuencia angular natural resulta

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1,6 \times 10^8}{2,5 \times 10^5}} = 25,30 \text{ rad/s} \quad (1.9.1)$$

La frecuencia natural es

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 4,03 \text{ Hz} \quad (1.9.2)$$

Finalmente,

$$T = \frac{1}{f} = 0,248 \text{ s} \quad (1.9.3)$$

Este período constituye uno de los parámetros fundamentales utilizados en el diseño sismorresistente de edificaciones, ya que permite estimar las fuerzas sísmicas mediante los espectros de respuesta establecidos en normas técnicas como la E.030 del Reglamento Nacional de Edificaciones del Perú.

1.10 Energía del Movimiento Armónico

La energía cinética es:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.10.1)$$

La energía potencial es:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \quad (1.10.2)$$

La energía total:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \quad (1.10.3)$$

1.11 Péndulo Simple

Para pequeñas oscilaciones:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \quad (1.11.1)$$

Su período es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (1.11.2)$$

1.12 Péndulo Compuesto

El período viene dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad (1.12.1)$$

donde:

- I : momento de inercia.
- d : distancia al centro de masa.

1.13 Oscilaciones Amortiguadas

La ecuación diferencial es:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (1.13.1)$$

La solución:

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega_d t + \phi) \quad (1.13.2)$$

donde

$$\beta = \frac{b}{2m}. \quad (1.13.3)$$

1.14 Oscilaciones Forzadas

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \quad (1.14.1)$$

1.15 Resonancia

La frecuencia de resonancia es aproximadamente:

$$\omega_r \simeq \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.15.1)$$

La resonancia tiene gran importancia en el análisis de vibraciones de estructuras y puentes.

1.16 Superposición de Oscilaciones

Si dos movimientos poseen la misma frecuencia:

$$x_1 = A_1 \cos \omega t \quad (1.16.1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi) \quad (1.16.2)$$

La resultante es:

$$x = x_1 + x_2 \quad (1.16.3)$$

1.17 Ondas Mecánicas

Una onda sinusoidal se expresa mediante:

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (1.17.1)$$

donde:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.17.2)$$

$$\omega = 2\pi f \quad (1.17.3)$$

1.18 Velocidad de Propagación

$$v = f\lambda \quad (1.18.1)$$

1.19 Ecuación de Onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1.19.1)$$

1.20 Ondas Sonoras

La intensidad sonora es:

$$I = \frac{P}{A} \quad (1.20.1)$$

El nivel sonoro:

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (1.20.2)$$

1.21 Efecto Doppler

La frecuencia observada es:

$$f' = f \left(\frac{v \pm v_o}{v \mp v_s} \right) \quad (1.21.1)$$

1.22 Análisis de Fourier

Una función periódica puede escribirse como:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (1.22.1)$$

1.23 Aplicaciones en Ingeniería Civil

- Vibraciones de edificios y puentes.
- Ingeniería sísmica.
- Diseño de amortiguadores estructurales.
- Propagación de ondas sísmicas.
- Control de vibraciones en maquinaria.
- Análisis dinámico de estructuras.

1.24 Ejemplo en Scilab

```
clc;
clear;

t=0:0.01:10;
A=2;
w=3;

x=A*cos(w*t);

plot(t,x);
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('x(t)');
title('Movimiento Armónico Simple');
```

1.25 Problemas Propuestos para Casa

Cada alumno deberá resolver los problemas de manera manual y detallada en hojas cuadriculadas. La entrega será semanal e incluirá todo lo avanzado hasta la fecha. Es obligatorio resolver la totalidad de los ejercicios propuestos, mostrando el procedimiento completo paso a paso.

Problema 1

Un cuerpo realiza un movimiento armónico simple descrito por

$$x(t) = 0,25 \cos(4t) \text{ m.}$$

Determine:

- La amplitud.
- La frecuencia angular.
- El período.
- La frecuencia.

Problema 2

Una masa de $0,5\text{ kg}$ está unida a un resorte de constante elástica $k = 200\text{ N/m}$. Determine:

- La frecuencia angular.
- El período de oscilación.

Problema 3

Un oscilador armónico tiene una amplitud de $0,10\text{ m}$ y una frecuencia de 2 Hz . Determine:

- La velocidad máxima.
- La aceleración máxima.

Problema 4

Un péndulo simple tiene una longitud de $1,5\text{ m}$. Determine su período de oscilación.

Problema 5

Un péndulo simple posee un período de 3 s . Determine su longitud.

Problema 6

Una partícula de masa 2 kg oscila con amplitud de $0,15\text{ m}$ y constante elástica $k = 500\text{ N/m}$. Determine la energía mecánica total.

Problema 7

La posición de un oscilador está dada por

$$x(t) = 0,30 \sin(5t) \text{ m}.$$

Determine:

- La velocidad en $t = 1\text{ s}$.
- La aceleración en $t = 1\text{ s}$.

Problema 8

Un sistema masa-resorte tiene $m = 1\text{ kg}$ y $k = 100\text{ N/m}$. Determine la ecuación diferencial que gobierna el movimiento.

Problema 9

Un oscilador amortiguado posee:

$$m = 2\text{ kg}, \quad b = 6\text{ kg/s}.$$

Determine el coeficiente de amortiguamiento β .

Problema 10

Una fuerza periódica de amplitud 20 N actúa sobre un sistema masa-resorte. Explique qué ocurre cuando la frecuencia de excitación coincide con la frecuencia natural del sistema.

Problema 11

Una onda tiene frecuencia de 50Hz y longitud de onda de $0,8\text{m}$. Determine su velocidad de propagación.

Problema 12

Una onda mecánica se propaga con velocidad de 300m/s y frecuencia de 100Hz . Determine la longitud de onda.

Problema 13

La ecuación de una onda es

$$y(x, t) = 0,05 \sin(6x - 20t).$$

Determine:

- La amplitud.
- El número de onda.
- La frecuencia angular.
- La velocidad de propagación.

Problema 14

Una fuente sonora emite una potencia de 2W . Determine la intensidad sonora a una distancia de 5m .

Problema 15

El nivel de intensidad sonora en un punto es de 80dB . Determine la intensidad correspondiente.

Problema 16

Una ambulancia se acerca a un observador con una velocidad de 25m/s emitiendo una frecuencia de 600Hz . Si la velocidad del sonido es 340m/s , determine la frecuencia observada.

Problema 17

Una ambulancia se aleja de un observador a 20m/s y emite una frecuencia de 500Hz . Determine la frecuencia observada.

Problema 18

Dos movimientos armónicos simples están dados por:

$$x_1 = 3 \cos(2t), \quad x_2 = 4 \cos(2t).$$

Determine la amplitud resultante.

Problema 19

Determine la serie de Fourier de la función periódica:

$$f(t) = \sin(\omega t) + 0,5 \sin(3\omega t).$$

Identifique las frecuencias presentes en la señal.

Problema 20

Durante un sismo, un edificio oscila con un período de $2,5\text{ s}$. Determine:

- La frecuencia natural de la estructura.
- La frecuencia angular.
- Explique si una excitación externa de igual frecuencia podría producir resonancia.



2. Calor y Termodinámica

2.1 Temperatura y Calor

La Termodinámica estudia las transformaciones de la energía térmica y su interacción con los sistemas físicos. En Ingeniería Civil constituye la base para el diseño de edificaciones energéticamente eficientes, puentes, pavimentos, presas, túneles y estructuras sometidas a variaciones de temperatura.

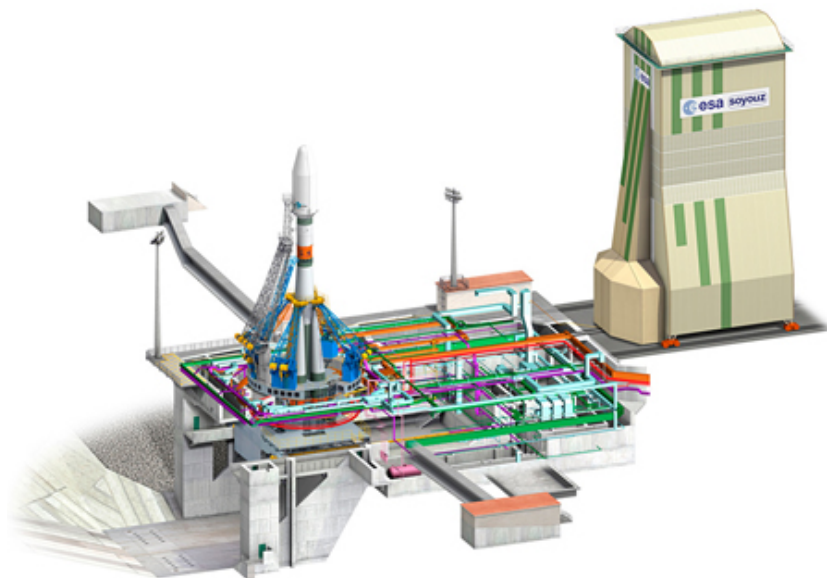


Figura 2.1.1: *Infraestructura de Lanzamiento de vehículos*

2.2 Concepto de Temperatura

La temperatura es una propiedad intensiva que mide el estado térmico de un cuerpo y determina el sentido en que fluye el calor entre dos sistemas.

Cuando dos cuerpos poseen diferentes temperaturas, el calor siempre fluye desde el cuerpo de mayor temperatura hacia el de menor temperatura hasta alcanzar el equilibrio térmico.

La relación entre las escalas Celsius y Kelvin es

$$T(K) = T(^{\circ}C) + 273,15 \quad (2.2.1)$$

La conversión entre las escalas Celsius y Fahrenheit es

$$^{\circ}F = \frac{9}{5}(^{\circ}C) + 32 \quad (2.2.2)$$

2.3 Demostración de las Escalas de Temperatura

La escala Kelvin se define de forma que el cero absoluto corresponde al estado de mínima energía térmica posible.

Si

$$0\,K = -273,15^{\circ}C,$$

entonces

$$T(K) = T(^{\circ}C) + 273,15.$$

Por ejemplo,

$$25^{\circ}C = 298,15\,K.$$

2.4 Equilibrio Térmico

La Ley Cero de la Termodinámica establece que si dos cuerpos están en equilibrio térmico con un tercero, entonces también están en equilibrio entre sí.

Matemáticamente,

$$T_A = T_B = T_C \quad (2.4.1)$$

Este principio permite utilizar los termómetros como instrumentos de medición de temperatura.

2.5 Energía Interna

La energía interna representa la suma de todas las energías microscópicas asociadas al movimiento molecular y a las fuerzas intermoleculares.

$$U = \sum_i E_i \quad (2.5.1)$$

Para un gas ideal,

$$\Delta U = nC_v\Delta T \quad (2.5.2)$$

donde

- n número de moles,
- C_v calor específico a volumen constante.

Se observa que la energía interna depende únicamente de la temperatura.

2.6 Cantidad de Calor

El calor es energía en tránsito debido a una diferencia de temperatura.

Experimentalmente se verifica que la cantidad de calor transferida es proporcional a

- la masa,
- el calor específico,
- el incremento de temperatura.

Por tanto,

$$Q \propto m \quad (2.6.1)$$

$$Q \propto c \quad (2.6.2)$$

$$Q \propto \Delta T \quad (2.6.3)$$

Combinando las tres proporcionalidades,

$$Q = mc\Delta T \quad (2.6.4)$$

donde

- m masa,
- c calor específico,
- $\Delta T = T_f - T_i$.

2.7 Capacidad Calorífica

La capacidad calorífica representa la cantidad de calor necesaria para elevar en un grado la temperatura de un cuerpo.

Por definición,

$$C = \frac{Q}{\Delta T} \quad (2.7.1)$$

Como

$$Q = mc\Delta T,$$

se obtiene

$$C = mc \quad (2.7.2)$$

y por consiguiente

$$c = \frac{C}{m} \quad (2.7.3)$$

2.8 Calor Latente

Durante un cambio de fase la temperatura permanece constante.

Todo el calor suministrado modifica únicamente la estructura molecular.

Experimentalmente,

$$Q \propto m \quad (2.8.1)$$

por lo que

$$Q = mL \quad (2.8.2)$$

donde

- L_f calor latente de fusión,
- L_v calor latente de vaporización.

2.9 Dilatación Térmica

Cuando aumenta la temperatura, las distancias intermoleculares también aumentan.

2.9.1 Demostración de la Dilatación Lineal

Experimentalmente,

$$\Delta L \propto L_0$$

$$\Delta L \propto \Delta T$$

Combinando ambas relaciones,

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T \quad (2.9.1)$$

donde α es el coeficiente de dilatación lineal.

La longitud final es

$$L = L_0(1 + \alpha \Delta T) \quad (2.9.2)$$

2.9.2 Dilatación Superficial

Para placas delgadas,

$$\Delta A = 2\alpha A_0 \Delta T \quad (2.9.3)$$

2.9.3 Dilatación Volumétrica

En cuerpos tridimensionales,

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T \quad (2.9.4)$$

donde

$$\beta = 3\alpha \quad (2.9.5)$$

para materiales isotrópicos.

2.10 Esfuerzo Térmico

Si el elemento estructural no puede expandirse libremente,

$$\varepsilon = \alpha \Delta T$$

pero también,

$$\sigma = E\varepsilon$$

Sustituyendo,

$$\sigma = E\alpha\Delta T \quad (2.10.1)$$

Esta ecuación demuestra que una variación de temperatura puede generar esfuerzos importantes aun cuando no existan cargas mecánicas.

2.11 Transferencia de Calor

2.11.1 Conducción

La conducción ocurre mediante transferencia de energía molecular.

La Ley de Fourier establece

$$\dot{Q} = -kA \frac{dT}{dx} \quad (2.11.1)$$

Para una pared plana de espesor constante,

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

Sustituyendo,

$$\dot{Q} = \frac{kA(T_1 - T_2)}{L} \quad (2.11.2)$$

Integrando durante un tiempo t ,

$$Q = \frac{kA(T_1 - T_2)t}{L} \quad (2.11.3)$$

2.11.2 Convección

La convección corresponde al intercambio de calor entre una superficie y un fluido. Experimentalmente,

$$Q \propto A$$

$$Q \propto (T_s - T_\infty)$$

$$Q \propto t$$

De estas relaciones se obtiene la Ley de Enfriamiento de Newton,

$$Q = hA(T_s - T_\infty)t \quad (2.11.4)$$

donde

- h es el coeficiente convectivo.
- T_s temperatura superficial.
- T_∞ temperatura del fluido.

2.12 Interpretación Física

Las ecuaciones anteriores muestran que:

- El calor siempre fluye desde temperaturas altas hacia temperaturas bajas.
- Los materiales con mayor calor específico requieren más energía para aumentar su temperatura.
- Los sólidos se expanden cuando aumenta la temperatura.
- Si la expansión está restringida aparecen esfuerzos térmicos que pueden provocar fisuración.
- La conducción domina en sólidos mientras que la convección domina en fluidos.

2.13 Aplicaciones en Ingeniería Civil

2.13.1 Juntas de Dilatación en Puentes

Los puentes experimentan importantes variaciones térmicas durante el día. Su expansión se calcula mediante

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T \quad (2.13.1)$$

Por esta razón se incorporan juntas de expansión para evitar esfuerzos excesivos y fisuras.

2.13.2 Pavimentos de Concreto

Las losas de concreto aumentan y disminuyen su longitud diariamente.

La separación entre juntas se determina considerando la dilatación térmica para evitar levantamientos y agrietamientos del pavimento.

2.13.3 Edificios

Las fachadas metálicas y estructuras de acero sufren deformaciones térmicas.

Cuando estas deformaciones son restringidas aparecen esfuerzos

$$\sigma = E\alpha\Delta T \quad (2.13.2)$$

que deben considerarse durante el diseño estructural.

2.13.4 Transferencia de Calor en Edificaciones

La Ley de Fourier se utiliza para diseñar muros aislantes.

Un menor coeficiente de conductividad térmica (k) disminuye las pérdidas energéticas y mejora la eficiencia térmica de la vivienda.

2.13.5 Presas y Concreto Masivo

Durante el proceso de hidratación del cemento se libera calor.

Las diferencias de temperatura entre el núcleo y la superficie generan esfuerzos térmicos que pueden producir fisuración.

Por ello se realizan análisis térmicos utilizando

$$Q = mc\Delta T \quad (2.13.3)$$

y modelos de conducción de calor para controlar la temperatura durante el proceso constructivo.

2.14 Ejemplo Aplicado a Ingeniería Civil

Una viga de acero posee una longitud de

$$L_0 = 20m$$

y está sometida a un incremento de temperatura de

$$\Delta T = 40^\circ C.$$

Si

$$\alpha = 12 \times 10^{-6}/^\circ C,$$

la expansión será

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T = 12 \times 10^{-6}(20)(40) = 9,6 \times 10^{-3}m \quad (2.14.1)$$

$$\Delta L = 9,6 \text{ mm}$$

Este resultado demuestra la necesidad de incorporar juntas de dilatación en puentes, estructuras metálicas y edificaciones para evitar esfuerzos térmicos que comprometan la seguridad estructural.

2.15 Radiación

La radiación térmica es el mecanismo de transferencia de calor mediante ondas electromagnéticas, sin necesidad de un medio material. Todos los cuerpos cuya temperatura sea superior al cero absoluto emiten energía radiante.

2.15.1 Ley de Stefan–Boltzmann

Experimentalmente se comprobó que la potencia radiada por un cuerpo negro es proporcional al área superficial y a la cuarta potencia de su temperatura absoluta. Matemáticamente,

$$P \propto A$$

$$P \propto T^4$$

Combinando ambas relaciones,

$$P = \varepsilon \sigma A T^4 \quad (2.15.1)$$

donde

- ε es la emisividad del material,
- $\sigma = 5,670 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ es la constante de Stefan–Boltzmann,
- A es el área superficial,
- T es la temperatura absoluta.

2.15.2 Intercambio Neto de Radiación

Cuando dos superficies intercambian energía radiante,

$$P_1 = \varepsilon \sigma A T_1^4 \quad (2.15.2)$$

$$P_2 = \varepsilon \sigma A T_2^4 \quad (2.15.3)$$

El flujo neto corresponde a

$$P = \varepsilon \sigma A (T_1^4 - T_2^4) \quad (2.15.4)$$

2.15.3 Aplicaciones en Ingeniería Civil

La radiación térmica interviene en:

- Diseño bioclimático de edificaciones.
- Fachadas ventiladas.
- Cubiertas reflectantes.
- Evaluación del calentamiento de pavimentos.
- Transferencia térmica en túneles.
- Diseño energético de viviendas.

2.16 Teoría Cinética de los Gases

La teoría cinética explica el comportamiento macroscópico de los gases a partir del movimiento aleatorio de millones de moléculas.

Sus principales hipótesis son:

- Las moléculas poseen volumen despreciable.
- Se desplazan aleatoriamente.
- Los choques son perfectamente elásticos.
- No existen fuerzas intermoleculares excepto durante las colisiones.

2.16.1 Ecuación del Gas Ideal

Experimentalmente se obtuvo

$$PV \propto n$$

$$PV \propto T$$

Combinando ambas relaciones,

$$\boxed{PV = nRT} \quad (2.16.1)$$

donde

- P presión,
- V volumen,
- n número de moles,
- R constante universal,
- T temperatura absoluta.

2.16.2 Velocidad Cuadrática Media

A partir de la teoría cinética,

$$PV = \frac{1}{3} N m v_{rms}^2 \quad (2.16.2)$$

Igualando con la ecuación del gas ideal,

$$NkT = \frac{1}{3} N m v_{rms}^2$$

despejando,

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad (2.16.3)$$

2.16.3 Energía Cinética Molecular

La energía cinética promedio de cada molécula es

$$E_k = \frac{3}{2}kT \quad (2.16.4)$$

Esta expresión demuestra que la temperatura es una medida directa de la energía cinética promedio de las moléculas.

2.17 Leyes de los Gases

2.17.1 Ley de Boyle

Si la temperatura permanece constante,

$$PV = \text{constante}$$

por lo tanto,

$$P_1V_1 = P_2V_2 \quad (2.17.1)$$

2.17.2 Ley de Charles

Cuando la presión permanece constante,

$$V \propto T$$

obteniéndose

$$\frac{V}{T} = cte \quad (2.17.2)$$

2.17.3 Ley de Gay-Lussac

Si el volumen permanece constante,

$$P \propto T$$

entonces

$$\frac{P}{T} = cte \quad (2.17.3)$$

2.17.4 Ley Combinada

Combinando las tres leyes anteriores,

$$\boxed{\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}} \quad (2.17.4)$$

2.18 Trabajo de un Gas

Cuando un gas cambia de volumen realiza trabajo mecánico.

Para un desplazamiento diferencial,

$$dW = PdV \quad (2.18.1)$$

Integrando,

$$\boxed{W = \int_{V_1}^{V_2} PdV} \quad (2.18.2)$$

2.18.1 Proceso Isobárico

Si la presión permanece constante,

$$P = \text{cte}$$

entonces,

$$\boxed{W = P(V_2 - V_1)} \quad (2.18.3)$$

2.19 Primera Ley de la Termodinámica

La conservación de la energía establece que

$$\text{Calor recibido} = \text{Variación de energía interna} + \text{Trabajo realizado}$$

por tanto,

$$\boxed{\Delta U = Q - W} \quad (2.19.1)$$

Esta ecuación constituye el principio de conservación de la energía para sistemas termodinámicos.

2.20 Procesos Termodinámicos**2.20.1 Proceso Isotérmico**

La temperatura permanece constante,

$$\Delta U = 0$$

y

$$\boxed{PV = \text{cte}} \quad (2.20.1)$$

2.20.2 Proceso Adiabático

No existe intercambio de calor,

$$Q = 0$$

y se verifica

$$PV^\gamma = \text{cte} \quad (2.20.2)$$

2.20.3 Proceso Isochórico

El volumen permanece constante,

$$dV = 0$$

por tanto,

$$W = 0 \quad (2.20.3)$$

2.20.4 Proceso Isobárico

La presión permanece constante,

$$P = \text{cte} \quad (2.20.4)$$

2.21 Segunda Ley de la Termodinámica

La Segunda Ley establece que todos los procesos naturales ocurren aumentando la entropía del universo.

Para un proceso reversible,

$$dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T} \quad (2.21.1)$$

donde

- S es la entropía.
- δQ_{rev} representa el calor reversible.

2.22 Máquinas Térmicas

Una máquina térmica transforma parte del calor suministrado en trabajo mecánico.

El rendimiento térmico se define como

$$\eta = \frac{W}{Q_H} \quad (2.22.1)$$

donde

$$0 < \eta < 1.$$

2.23 Ciclo de Carnot

El Ciclo de Carnot representa la máxima eficiencia teórica que puede alcanzar una máquina térmica. Su rendimiento es

$$\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} \quad (2.23.1)$$

donde

- T_c corresponde al foco caliente.
- T_f corresponde al foco frío.

Esta expresión demuestra que ninguna máquina térmica puede alcanzar un rendimiento del 100 %.

2.24 Interpretación Física

Las ecuaciones anteriores permiten concluir que

- La presión aumenta cuando aumenta la temperatura.
- El trabajo realizado por un gas depende del cambio de volumen.
- La energía interna depende principalmente de la temperatura.
- Toda transformación energética implica pérdidas asociadas al incremento de entropía.
- Ninguna máquina térmica posee rendimiento perfecto.

2.25 Aplicaciones en Ingeniería Civil

Las leyes de la termodinámica tienen numerosas aplicaciones en Ingeniería Civil.

2.25.1 Diseño Energético de Edificaciones

La radiación solar sobre cubiertas y fachadas se evalúa mediante la Ley de Stefan–Boltzmann para seleccionar materiales reflectantes y mejorar el confort térmico.

2.25.2 Sistemas de Ventilación

La ecuación del gas ideal permite analizar las variaciones de presión y temperatura del aire en edificios, hospitales y túneles.

2.25.3 Concreto Masivo

Durante la hidratación del cemento aumenta la temperatura interna del concreto. El análisis de transferencia de calor y de la Primera Ley de la Termodinámica permite controlar fisuras térmicas en presas, cimentaciones y grandes losas.

2.25.4 Túneles y Minas

Los procesos de ventilación se diseñan considerando la expansión del aire, las leyes de los gases y los intercambios térmicos para garantizar condiciones adecuadas de trabajo.

2.25.5 Eficiencia Energética

La Segunda Ley de la Termodinámica constituye la base para evaluar bombas de calor, sistemas HVAC, aire acondicionado y equipos de climatización utilizados en edificaciones modernas.

2.26 Ejemplo Aplicado a Ingeniería Civil

Una cubierta metálica de área

$$A = 120\text{m}^2$$

posee una emisividad

$$\varepsilon = 0,82$$

y alcanza una temperatura superficial de

$$T_1 = 330\text{K}.$$

El ambiente se encuentra a

$$T_2 = 300\text{K}.$$

La potencia radiada es

$$P = \varepsilon \sigma A (T_1^4 - T_2^4) \quad (2.26.1)$$

Sustituyendo los datos correspondientes se obtiene la pérdida de calor por radiación, información fundamental para el diseño de cubiertas, fachadas ventiladas y edificaciones energéticamente eficientes.

2.27 Aplicaciones en Ingeniería Civil

- Dilatación de puentes.
- Juntas de expansión.
- Transmisión de calor en edificaciones.
- Diseño bioclimático.
- Aislamiento térmico.
- Centrales termoeléctricas.
- Intercambiadores de calor.

2.28 Ejercicios Propuestos Avanzados: Calor y Termodinámica

Indicaciones:

- Resolver **a mano**, mostrando el desarrollo matemático completo.
- Justificar cada ecuación empleada a partir de principios físicos.
- Expresar las variables en unidades del Sistema Internacional (SI).
- Incluir diagramas, esquemas, gráficos y procesos termodinámicos cuando corresponda.
- Interpretar físicamente los resultados obtenidos y discutir su aplicación en Ingeniería Civil.

1. Conversión de Escalas de Temperatura

- a) Convertir una temperatura dada entre las escalas Celsius, Fahrenheit y Kelvin.
- b) Demostrar las relaciones matemáticas entre las tres escalas.
- c) Analizar la importancia del uso de la escala Kelvin en Termodinámica.

2. **Equilibrio Térmico**
 - a) Aplicar la Ley Cero de la Termodinámica a tres cuerpos en contacto.
 - b) Determinar la temperatura de equilibrio.
 - c) Justificar el resultado mediante conservación de la energía.
3. **Calor Sensible**
 - a) Calcular el calor absorbido por un sólido al variar su temperatura.
 - b) Analizar la influencia de la masa y del calor específico.
 - c) Comparar distintos materiales empleados en construcción.
4. **Capacidad Calorífica**
 - a) Determinar la capacidad calorífica de un cuerpo.
 - b) Relacionarla con el calor específico.
 - c) Interpretar su importancia en sistemas constructivos.
5. **Calor Latente**
 - a) Calcular el calor requerido durante un cambio de fase.
 - b) Diferenciar entre calor sensible y calor latente.
 - c) Analizar aplicaciones en materiales de construcción.
6. **Dilatación Lineal**
 - a) Determinar la variación de longitud de una barra metálica.
 - b) Comparar diferentes coeficientes de dilatación.
 - c) Analizar juntas de expansión en puentes.
7. **Dilatación Superficial y Volumétrica**
 - a) Calcular la variación de área.
 - b) Determinar el cambio de volumen.
 - c) Aplicar al diseño de reservorios y tanques.
8. **Esfuerzo Térmico**
 - a) Determinar el esfuerzo térmico en una barra restringida.
 - b) Analizar la influencia del módulo de Young.
 - c) Evaluar posibles fallas estructurales.
9. **Conducción de Calor**
 - a) Aplicar la Ley de Fourier.
 - b) Determinar el flujo de calor en una pared compuesta.
 - c) Analizar el efecto del espesor y la conductividad térmica.
10. **Convección**
 - a) Aplicar la Ley de Enfriamiento de Newton.
 - b) Determinar la tasa de transferencia de calor.
 - c) Analizar el efecto del coeficiente de convección.
11. **Radiación Térmica**
 - a) Aplicar la Ley de Stefan-Boltzmann.
 - b) Calcular la potencia radiada por una superficie.
 - c) Evaluar el efecto de la emisividad.
12. **Gas Ideal**
 - a) Aplicar la ecuación de estado del gas ideal.
 - b) Determinar presión, volumen o temperatura.
 - c) Analizar la influencia del número de moles.
13. **Leyes de Boyle, Charles y Gay-Lussac**
 - a) Resolver un problema utilizando cada ley.
 - b) Comparar los resultados obtenidos.
 - c) Interpretar físicamente cada proceso.
14. **Trabajo de un Gas**

- a) Calcular el trabajo realizado durante una expansión.
 - b) Representar el proceso en un diagrama P-V.
 - c) Comparar procesos isotérmico e isobárico.
15. **Primera Ley de la Termodinámica**
- a) Aplicar la conservación de la energía.
 - b) Determinar el cambio de energía interna.
 - c) Analizar el intercambio de calor y trabajo.
16. **Procesos Termodinámicos**
- a) Resolver procesos isotérmico, isobárico, isocórico y adiabático.
 - b) Comparar el trabajo realizado en cada proceso.
 - c) Representarlos en diagramas P-V y T-S.
17. **Segunda Ley de la Termodinámica**
- a) Calcular la variación de entropía.
 - b) Analizar procesos reversibles e irreversibles.
 - c) Interpretar el significado físico de la entropía.
18. **Máquinas Térmicas**
- a) Determinar el rendimiento térmico.
 - b) Calcular el trabajo útil.
 - c) Analizar pérdidas energéticas.
19. **Ciclo de Carnot**
- a) Determinar la eficiencia máxima.
 - b) Comparar con una máquina térmica real.
 - c) Analizar la influencia de las temperaturas de operación.
20. **Problema Integrador Final**
- a) Analizar un sistema completo de transferencia de calor.
 - b) Aplicar la Primera y Segunda Ley de la Termodinámica.
 - c) Evaluar la eficiencia energética de una edificación considerando conducción, convección y radiación.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTÓBAL DE HUAMANGA
FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL

Datos autor /Teléfono: +51965281663

Correo Electrónico: jose.huayanay@unsch.edu.pe

DOI: <https://doi.org/10.0000/villautomation.lib07>

Bibliografía

Books

2.29 Bibliografía Recomendada

- ÇENGEL, Y.A. y BOLES, M.A. (2019). *Termodinámica*. 9ª edición. McGraw-Hill Education. Capítulos 1–9.
- ÇENGEL, Y.A. (2020). *Transferencia de Calor y Masa: Fundamentos y Aplicaciones*. 6ª edición. McGraw-Hill Education. Capítulos 1–4.
- MORAN, M.J., SHAPIRO, H.N., BOETTNER, D.D. y BAILEY, M.B. (2018). *Fundamentos de Termodinámica Técnica*. 9ª edición. Wiley. Capítulos 1–8.
- SONNTAG, R.E., BORGNAKKE, C. y VAN WYLEN, G.J. (2003). *Fundamentos de Termodinámica*. 6ª edición. Limusa Wiley. Capítulos 1–8.
- INCROPERA, F.P., DEWITT, D.P., BERGMAN, T.L. y LAVINE, A.S. (2017). *Fundamentos de Transferencia de Calor*. 7ª edición. Wiley. Capítulos 1–6.
- HALLIDAY, D., RESNICK, R. y WALKER, J. (2014). *Fundamentos de Física*. Volumen 1. 10ª edición. Wiley. Capítulos 17–20.
- SERWAY, R.A. y JEWETT, J.W. (2019). *Física para Ciencias e Ingeniería*. Volumen 1. 10ª edición. Cengage Learning. Capítulos 18–22.
- ÇENGEL, Y.A. y CIMBALA, J.M. (2014) *Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications*. 3ª edición. McGraw-Hill. Capítulos 4–10
- POTTER, M.C. y WIGGERT, D.C. (2011) *Mechanics of Fluids*. 4ª edición. Cengage Learning.

ning. Capítulos 5–9

- KUNDU, P.K., COHEN, I.M. y DOWLING, D.R. (2015) *Fluid Mechanics*. 6ª edición. Academic Press. Capítulos 2–6

-
- CHOW, V.T. (1959) *Open-Channel Hydraulics*. McGraw-Hill. Capítulos 1–6

- HENDERSON, F.M. (1966) *Open Channel Flow*. Macmillan. Capítulos 2–7

- STREETER, V.L., WYLIE, E.B. y BEDFORD, K.W. (1998) *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill. Capítulos 3–7

-
- HUAYANAY VILLAR, J.L. y MENESES HIYO, S.Y. (2024) *Diseño y construcción de un sistema inteligente de control de bombas de agua en cultivo de fresas (Fragaria)*. Revista de Investigación Científica de la UNF – Aypate, 2(4), 24–35.

DOI: 10.57063/ricay.v2i4.66

- HUAYANAY VILLAR, J.L. y CUNHA, J.P.V.S. (2022) *Sliding-Mode Controllers for Soil Moisture Modeled by Nonlinear Parabolic Partial Differential Equations*. IEEE Variable Structure Systems (VSS).

DOI: 10.1109/VSS57184.2022.9902067

- HUAYANAY VILLAR, J.L. (2024) *Seguimiento de trayectoria en robótica móvil con alimentación de energía solar*. Revista de Investigación Científica de la UNF – Aypate, 2(4), 1–12.

DOI: 10.57063/ricay.v2i4.64